PRIMER PRETORNEO 2007
JUVENIL

1. Hay tres clases de personas, las *sinceras*, que siempre dicen la verdad, las *falsas*, que siempre mienten, y las *normales* que a veces dicen la verdad y a veces mienten. Las preguntas permitidas solo admiten respuestas SI y NO, y son del tipo “¿es tal persona normal (o sincera o falsa)?”.
Dado un grupo de tres personas, entre las que se sabe que una es de cada clase, hay que descubrir cuál es de cada clase. Los tres conocen lo que es cada uno.
Indicar una secuencia de preguntas a las personas del grupo que permita identificar de que clase es cada una de las tres personas.

4 PUNTOS

2. Inicialmente en el pizarrón hay escritos tres números enteros positivos: x, y, z. Franco anota en una hoja el resultado de multiplicar dos de los números, a su elección, y luego reemplaza el tercer número del pizarrón por ese tercer número menos 1. (Por ejemplo, si los tres números del pìzarrón son 9, 7, 4, Franco puede anotar en la hoja 28 ($=7\cdot 4$) y en el pizarrón quedan 8, 7, 4.) Con los nuevos tres números del pizarrón repite el procedimiento, y así una y otra vez hasta que uno de los tres números del pizarrón sea 0. A continuación, Franco suma todos los resultados de las multiplicaciones que tiene anotados en su hoja. ¿Qué resultado obtiene?

5 PUNTOS

3. Determinar si es posible escribir los números enteros del 1 al 100 en las casillas de un tablero de 10×10, sin repetir números, de modo que no haya dos casillas con un lado o un vértice común tales que la suma de los números de esas casillas sea divisible por 4.

5 PUNTOS

4. Hay que dividir un cuadrado en polígonos no convexos con todos sus lados paralelos a lados del cuadrado, de modo que todos los polígonos sean congruentes entre si, pero ninguno de los polígonos de la subdivisión se obtenga de otro mediante una traslación.
Determinar el máximo número de polígonos que puede tener la subdivisión y mostrar una subdivisión con esa cantidad de polígonos.
ACLARACIÓN: Un polígono es no convexo si tiene por lo menos uno de sus ángulos mayor que 180º.

5 PUNTOS

PRIMER PRETORNEO 2007
MAYOR

1. En las casillas de un tablero de 50×50 se escribieron al azar los números enteros del 1 al 2500, sin repetir números. Demostrar que hay dos casillas con un lado o un vértice común tales que la suma de los números de esas casillas es divisible por 4.

4 PUNTOS

2. Inicialmente en el pizarrón hay escritos dos números enteros positivos: x, y. Julián anota en una hoja el cuadrado del menor de los dos números, y luego reemplaza el mayor número del pizarrón por la resta de los dos números del pizarrón. Con los nuevos dos números del pizarrón se repite el procedimiento, y así una y otra vez hasta que los dos números del pizarrón sean iguales. Entonces Julián anota el cuadrado de este número en la hoja, y el proceso termina. A continuación, Julián suma todos los cuadrados que tiene anotados en su hoja. ¿Qué resultado obtiene?

5 PUNTOS

3. Dado un triángulo ABC, sea D en la recta BC tal que $BD = BA$ y B está entre C y D. Las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo en los vértices B y C se cortan en el punto M. Demostrar que el cuadrilátero $ADMC$ tiene sus cuatro vértices en una circunferencia.
ACLARACIÓN: Un cuadrilátero convexo tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a 180º.

5 PUNTOS

4. Se tienen una progresión geométrica infinita y una progresión aritmética infinita. Se sabe que cada término de la progresión geométrica es también un término de la progresión aritmética. Demostrar que la razón de la progresión geométrica es un número entero.
ACLARACIÓN: Una progresión aritmética es una secuencia de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumando un cierto número fijo d, llamado diferencia o razón de la progresión.
Una progresión geométrica es una secuencia de números tales que cada uno se obtiene del anterior multiplicando por un cierto número fijo r, llamado razón de la progresión.

5 PUNTOS